ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΟ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ -2016-

**ΘΕΜΑ 1ο** Γ. i) ΛΑΘΟΣ, ii) ΣΩΣΤΟ, iii) ΣΩΣΤΟ, iv) ΣΩΣΤΟ
v) ΣΩΣΤΟ

**ΘΕΜΑ 2ο** 1. έστω $h(x)=\frac{f(x)}{x^3-1}$ (1) από υπόθεση $\lim\limits_{x\to1} h(x)=1$

(1) $\Rightarrow f(x)=h(x)(x^3-1)$ οπότε $\lim\limits_{x\to1} f(x)=\lim\limits_{x\to1}(h(x)(x^3-1))=0$

αφού η f συνεχής $\boxed{f(1)=0}$

• $\lim\limits_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}\overset{(1)}{=}\lim\limits_{x\to1}\frac{h(x)(x^3-1)-0}{x-1}=\lim\limits_{x\to1}\frac{h(x)\cancel{(x-1)}(x^2+x+1)}{\cancel{x-1}}=3$

οπότε $\boxed{f'(1)=3}$

η εφ: $y-f(1)=f'(1)(x-1)\Leftrightarrow y-0=3(x-1)\Leftrightarrow \boxed{y=3(x-1)}\to$ εφ

2. $\lim\limits_{x\to1}\frac{g(x)-g(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1}\frac{\frac{f(x)}{x-1}-3}{x-1}=\lim\limits_{x\to1}\frac{f(x)-3(x-1)}{(x-1)^2}$

$\underset{DLH}{\overset{0/0}{=}}\lim\limits_{x\to1}\frac{f'(x)-3}{2(x-1)}=\frac{1}{2}\lim\limits_{x\to1}\frac{f'(x)-f'(1)}{x-1}=\frac{1}{2}f''(1)=7.\Leftrightarrow\boxed{g'(1)=7}$

3. Για $x\neq1$ $g'(x)=\frac{f'(x)(x-1)-f(x)}{(x-1)^2}=\frac{1}{x-1}\left[f'(x)-\frac{f(x)}{x-1}\right]$ (*)

(Ι) Έστω $x>1$:

Από ΘΜΤ στο $[1,x]$ $\exists\,\xi\in(1,x)$: $f'(\xi)=\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\frac{f(x)}{x-1}$

$\xi<x\xrightarrow[f \text{ κυρτή}]{f'\uparrow} f'(\xi)<f'(x)\Leftrightarrow f'(x)-f'(\xi)>0\xrightarrow[x-1>0]{(*)} g'(x)>0\Rightarrow g\uparrow$

(ΙΙ) Έστω $x<1$:

Από ΘΜΤ στο $[x,1]$ $\exists\,\xi\in(x,1)$: $f'(\xi)=\frac{f(1)-f(x)}{1-x}=\frac{f(x)}{x-1}$

$\xi>x\xrightarrow{f'\uparrow} f'(\xi)>f'(x)\Leftrightarrow f'(x)-f'(\xi)<0\xrightarrow[x-1<0]{(*)} g'(x)>0\Rightarrow g\uparrow$

Αφού η g συνεχής στο $\mathbb{R}$ η $g\uparrow\mathbb{R}$

4. $\lim_{x\to 0}\frac{f(e^x)-x^2\eta\mu\frac{1}{x}}{x} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{f(e^x)}{x} - x\eta\mu\frac{1}{x}\right) = 3$

▶ $\lim_{x\to 0}\frac{f(e^x)}{x} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{f(e^x)}{e^x-1}\cdot\frac{e^x-1}{x}\right) = 3$

▶ $\lim_{x\to 0}\frac{f(e^x)}{e^x-1} \overset{u=e^x}{=} \lim_{u\to 1}\frac{f(u)}{u-1} = f'(1) = 3$

▶ $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} \underset{DLH}{\overset{\frac{0}{0}}{=}} \lim_{x\to 0} e^x = 1$

▶ $\left|x\eta\mu\frac{1}{x}\right| \le |x| \Leftrightarrow -|x| \le x\eta\mu\frac{1}{x} \le |x|$
$\lim_{x\to 0}|x| = 0 = \lim_{x\to 0}(-|x|)$ $\xrightarrow{K.\Pi.}$ $\lim_{x\to 0}\left(x\eta\mu\frac{1}{x}\right) = 0$

5. Έστω $K(x) = g(x) - \frac{24}{x^3}$

• Η $K(x)$ συνεχής ως πράξεις συνεχών στο $[1,2]$
• $K(1) = g(1) - 24 = 3 - 24 = -21 < 0$
• $K(2) = g(2) - \frac{24}{8} = f(2) - 3 > 0$

Ξέρουμε ότι η f είναι κυρτή οπότε $f(x) \ge$ εφαπτόμενης άρα $f(x) \ge 3(x-1)$ και η ισότητα ισχύει μόνο για το σημείο επαφής οπότε για $x=2$ έχουμε $f(2) > 3$

Άρα $K(1)K(2) < 0 \xrightarrow{\Theta.B.} \exists\, x_0 \in (1,2): K(x_0) = 0 \Leftrightarrow g(x_0) = \frac{24}{x_0^3}$

$K'(x) = g'(x) + \frac{24\cdot 3}{x^4} > 0$ άρα $K(x) \uparrow [1,2]$ έτσι το $x_0$ μοναδική ρίζα της $K(x)$.

ΘΕΜΑ 3ο 1. Από υπόθεση $(x^2-x)\cdot\int_1^{f(0)}(e^x-x)dx \le x^4$ για $x\in(-1,1)$

έστω $M(x) = (x^2-x)\int_1^{f(0)}(e^x-x)dx - x^4 \le 0$ ισχύει $M(0) = 0$

έτσι $M(x) \le M(0)$ δηλαδή $M(0)$ μέγιστο και $x=0$ εσωτερικό σημείο του $A_M = (-1,1)$ στο οποίο είναι παραγωγίσιμη οπότε από Θ.Fermat $M'(0) = 0$. $M'(x) = (2x-1)\int_1^{f(0)}(e^x-x)dx - 4x^3$

για $x=0$: $-\int_1^{f(0)}(e^x-x)\,dx=0 \Leftrightarrow \boxed{\int_1^{f(0)}(e^x-x)\,dx=0}$ (1)

Αν $p(x)=e^x-x$, $p'(x)=e^x-1$

| $x$ | | $0$ | |
|---|---|---|---|
| $p'$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $p$ | $\searrow$ | | $\nearrow$ |

$p(x)\geq p(0)=1$

δηλαδή $e^x-x>0$.

Έτσι αν $f(0)>1$ το ολοκλήρωμα θετικό $\overset{(1)}{\Rightarrow}$ Άτοπο

αν $f(0)<1$ " " αρνητικό $\overset{(1)}{\Rightarrow}$ -//-

οπότε $f(0)=1$

2. Ισχύει $\boxed{f'(x)=f^2(x)\cdot f(-x)}$ (*) τότε $f'(x)\cdot f(-x)=f^2(x)\,f^2(-x)$ (2)

(2) $\xrightarrow[\text{το } -x]{\text{όπου } x}$ $f'(-x)\cdot f(x)=f^2(-x)\cdot f^2(x)$ (3)

Από (2) − (3) $\rightarrow$ $f'(x)\cdot f(-x)-f'(-x)\cdot f(x)=0 \Leftrightarrow f'(x)\cdot f(-x)+(f(-x))'\cdot f(x)=0$

$\Leftrightarrow (f(x)\cdot f(-x))'=0$ έτσι θα υπάρχει $c\in\mathbb{R}$: $f(x)\cdot f(-x)=c$

για $x=0$: $1\cdot 1=c \Leftrightarrow \boxed{c=1}$ άρα $f(x)\cdot f(-x)=1 \Leftrightarrow \boxed{f(-x)=\frac{1}{f(x)}}$ (4)

Από (*) $\overset{(4)}{\Rightarrow}$ $f'(x)=f(x)$ οπότε $f(x)=c\cdot e^x \overset{x=0}{\Rightarrow} c=1$

Άρα $\boxed{f(x)=e^x}$

3. εφ: $y-g(\xi)=g'(\xi)(x-\xi)$ αρκεί το $(0,0)$ να την επαληθεύει

ή $-g(\xi)=-\xi\cdot g'(\xi)$

Είναι: $x\,g'(x)-g(x)=0 \overset{x\neq 0}{\Longleftrightarrow} \frac{x\,g'(x)-g(x)}{x^2}=0 \Leftrightarrow \left(\frac{g(x)}{x}\right)'=0$

Έστω $k(x)=\frac{g(x)}{x}$

Η $k(x)$ συνεχής στο $[α,β]$ ως πράξεις συνεχών

Η $k(x)$ παρ/μη στο $(α,β)$ " " παρ/μων

$k(α)=\frac{g(α)}{α}=\frac{\ln f(α)}{α}=\frac{\ln e^{α}}{α}=\frac{α}{α}=1$

$k(β)=\frac{g(β)}{β}=\frac{\ln f(β)}{β}=\frac{\ln e^{β}}{β}=\frac{β}{β}=1$

$\xrightarrow{\text{Rolle}}$ $\exists\, \xi\in(α,β)$: $k'(\xi)=0$

$\Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow \xi g'(\xi)-g(\xi)=0$.

4. $\underset{a}{|}\overset{\Delta x}{\text{———}}\underset{x_0}{|}\overset{\Delta x}{\text{———}}\underset{\beta}{|}$ χωρίζουμε το $[a,\beta]$
σε 2 ισομήκη διαστήματα

όπου $x_0 = \frac{a+\beta}{2}$ και $\Delta x = \frac{\beta - a}{2}$

Από ΘΜΤ στο $[a, x_0]$ $\exists\, \xi_1 \in (a, x_0)$: $g'(\xi_1) = \frac{g(x_0) - g(a)}{x_0 - a} = \frac{g(x_0) - a}{\Delta x}$

Από ΘΜΤ στο $[x_0, \beta]$ $\exists\, \xi_2 (x_0, \beta)$: $g'(\xi_2) = \frac{g(\beta) - g(x_0)}{\beta - x_0} = \frac{\beta - g(x_0)}{\Delta x}$

Έτσι $g'(\xi_1) + g'(\xi_2) = \frac{g(x_0) - a}{\Delta x} + \frac{\beta - g(x_0)}{\Delta x} = \frac{\beta - a}{\Delta x} = \frac{\beta - a}{\frac{\beta - a}{2}} = 2$

5. $f(e^x) + f(3x) = f(2x) + f(1-x) \Leftrightarrow \left(f(e^x) - f(1-x)\right) + \left(f(3x) - f(2x)\right) = 0$

$x=0$ προφανή ρίζα

Για $x>0$: $\begin{cases} e^x > 1-x \overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow} f(e^x) > f(1-x) \\ 3x > 2x \overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow} f(3x) > f(2x) \end{cases}$

οπότε η εξίσωση δεν παρουσιάζει ρίζα

$k(x) = e^x - (1-x) = e^x + x - 1$

$k'(x) = e^x + 1 > 0$

$k(x)\nearrow$ $\begin{cases} \xrightarrow{x>0} k(x) > 0 \Leftrightarrow e^x > 1-x \\ \xrightarrow{x<0} k(x) < 0 \Leftrightarrow e^x < 1-x \end{cases}$

Για $x<0$: $\left.\begin{cases} e^x < 1-x \overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow} f(e^x) < f(1-x) \\ 3x < 2x \overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow} f(3x) < f(2x) \end{cases}\right\}$ οπότε η εξίσωση δεν παρουσιάζει ρίζα

**ΘΕΜΑ 4ο**

1. Έστω $g(x) = x + e^x - \ln(e^x+1) + \ln 2 - 1$, $g(0) = 0$

$g'(x) = 1 + e^x - \frac{e^x}{e^x+1} = \frac{(e^x+1)^2 - e^x}{e^x+1} = \frac{e^{2x} + e^x + 1}{e^x+1} > 0$

άρα η $g\nearrow$ οπότε η $x=0$ μοναδική ρίζα

2. Ισχύει ότι η $y=2x$ εφάπτεται της $C_f$ οπότε αν $(x_0, f(x_0))$ το σημείο επαφής θα ισχύουν $\boxed{f'(x_0) = 2}$ και $\boxed{f(x_0) = 2x_0}$

Από υπόθεση $\ln(f'(x)) + f(x) - \ln(e^{f(x)} + 1) = e^{f(x)} + 1 - f'(x)\, e^{f(x)}$

για $x = x_0$: $\ln(2) + 2x_0 - \ln(e^{2x_0} + 1) = e^{2x_0} + 1 - 2e^{2x_0}$

$\Leftrightarrow 2x_0 + e^{2x_0} - \ln(e^{2x_0} + 1) + \ln 2 - 1 = 0 \Leftrightarrow g(2x_0) = 0 \Leftrightarrow \boxed{x_0 = 0}$

Άρα $\begin{cases} \boxed{f(0) = 0} \\ \text{και} \\ \boxed{f'(0) = 2} \end{cases}$

3. Από υπόθεση $\ln f'(x) + f(x) - \ln(e^{f(x)}+1) = e^{f(x)} + 1 - f'(x)\cdot e^{f(x)}$

$\Leftrightarrow \ln f'(x) + \ln e^{f(x)} - \ln(e^{f(x)}+1) = e^{f(x)} + 1 - f'(x)\, e^{f(x)}$

$\Leftrightarrow \ln(f'(x)\cdot e^{f(x)}) - \ln(e^{f(x)}+1) = e^{f(x)} + 1 - f'(x)\, e^{f(x)}$

$\Leftrightarrow \boxed{\ln(f'(x)\cdot e^{f(x)}) + f'(x)\cdot e^{f(x)} = \ln(e^{f(x)}+1) + e^{f(x)} + 1}$ (1)

Έστω $\Pi(x) = \ln x + x$, $x>0$ τότε $\Pi'(x) = \frac{1}{x} + 1 > 0 \Rightarrow \Pi(x) \nearrow \Rightarrow \Pi(x)$ "1-1"

$(1) \Rightarrow \Pi(f'(x)\cdot e^{f(x)}) = \Pi(e^{f(x)}+1) \overset{\Pi(x) \text{ "1-1"}}{\Leftrightarrow}$

$\Leftrightarrow f'(x)\cdot e^{f(x)} = e^{f(x)} + 1 \Leftrightarrow (e^{f(x)}+1)' = e^{f(x)} + 1$

άρα υπάρχει $c \in \mathbb{R}$: $e^{f(x)} + 1 = c\cdot e^{x} \xrightarrow{x=0} c = 2$

οπότε $e^{f(x)} = 2e^{x} - 1 \Leftrightarrow \boxed{f(x) = \ln(2e^{x}-1)}$ με $x \geq 0$ (από υπόθεση)

4. $f'(x) = \frac{2e^{x}}{2e^{x}-1} > 0$ οπότε η $f \nearrow [0,+\infty)$

$f''(x) = \frac{2e^{x}(2e^{x}-1) - 2e^{x}\cdot 2e^{x}}{(2e^{x}-1)^2} = \frac{2e^{x}(2e^{x}-1-2e^{x})}{(2e^{x}-1)^2} = \frac{-2e^{x}}{(2e^{x}-1)^2} < 0$

οπότε η $f$ κοίλη στο $[0,+\infty)$. $A_f = [0,+\infty) \xrightarrow{f \nearrow} f(A) = [f(0), \lim_{x\to+\infty} f(x)) = [0,+\infty)$

5. Από υπόθεση $F'(x) = f(x)$ και $F(1) = 0$

i) Από ΘΜΤ για την $F(x)$ στο $[x, x+1]$ $\exists\, \xi \in (x, x+1)$:

$F'(\xi) = \frac{F(x+1) - F(x)}{x+1-x} \Leftrightarrow \boxed{f(\xi) = F(x+1) - F(x)}$

όμως $x < \xi < x+1 \overset{f \nearrow}{\Leftrightarrow} f(x) < f(\xi) < f(x+1) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow f(x) < F(x+1) - F(x) < f(x+1)$ η $f(x) > 0$ για $x \to +\infty$ άρα τα πάντα είναι θετικά έτσι: $\frac{1}{f(x+1)} < \frac{1}{F(x+1)-F(x)} < \frac{1}{f(x)}$

$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{f(x)} = 0$, $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{f(x+1)} \overset{x+1=u}{=} \lim_{u\to+\infty} \frac{1}{f(u)} = 0$

οπότε από κρ. παρεμβολής $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{F(x+1)-F(x)} = 0$

Αν $M(x)=\frac{1}{F(x+1)-F(x)}$ τότε για $x\to+\infty$ : $M(x)>0$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}M(x)=0$

$\Leftrightarrow F(x+1)-F(x)=\frac{1}{M(x)}$ έτσι $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(F(x+1)-F(x)\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{M(x)}=+\infty$

ii) Έστω $\psi(x)=(x-1)\cdot\left(F(x+1)-xF(x)\right)+(x-2)\cdot\left(\int_0^1 2F(x)dx+f(x)\right)$

- Η $\psi(x)$ συνεχής στο $[1,2]$ ως πράξεις συνεχών
- $\psi(1)=-\left(\int_0^1 2F(x)dx+f(1)\right)$

▶ $F'(x)=f(x)\ \nearrow$ οπότε η $F$ κυρτή, η εξίσωση εφαπτομένης

για $x=1$ : $y-F(1)=F'(1)(x-1)\Leftrightarrow y-0=f(1)(x-1)\Leftrightarrow \boxed{\varepsilon\varphi:\ y=f(1)(x-1)}$

Αφού η $F$ κυρτή ισχύει $F(x)\geq f(1)(x-1)$ όπου η ισότητα ισχύει μόνο για το σημείο επαφής δηλαδή για $x=1$.

Έτσι $\int_0^1 F(x)dx>\int_0^1 f(1)(x-1)dx=f(1)\left[\frac{x^2}{2}-x\right]_0^1=f(1)\left(-\frac{1}{2}\right)$

$\Leftrightarrow \int_0^1 F(x)dx>-\frac{f(1)}{2}\Leftrightarrow \int_0^1 2F(x)dx+f(1)>0\Leftrightarrow \boxed{\psi(1)<0}$

- $\psi(2)=F(3)-2F(2)$

Από ΘΜΤ για την $F(x)$ στο $[1,2]$ : $\exists\ \xi_1\in(1,2)$ : $F'(\xi_1)=\frac{F(2)-\overset{0}{F(1)}}{2-1}$

$\Leftrightarrow \boxed{f(\xi_1)=F(2)}$

Από ΘΜΤ για την $F(x)$ στο $[2,3]$ $\exists\ \xi_2\in(2,3)$ : $F'(\xi_2)=\frac{F(3)-F(2)}{3-2}$

$\Leftrightarrow \boxed{f(\xi_2)=F(3)-F(2)}$

όμως $\xi_1<\xi_2 \overset{f\nearrow}{\Longleftrightarrow} f(\xi_1)<f(\xi_2)\Leftrightarrow F(2)<F(3)-F(2)$

$\Leftrightarrow F(3)-2F(2)>0\Leftrightarrow \boxed{\psi(2)>0}$

Οπότε $\psi(1)\psi(2)<0$ από Θ. Bolzano $\exists\ x_0\in(1,2)$ :

$\psi(x_0)=0\Leftrightarrow (x_0-1)\left(F(x_0+1)-x_0F(x_0)\right)+(x_0-2)\left(\int_0^1 2F(x)dx+f(x_0)\right)=0$

$\overset{x_0\in(1,2)}{\Longleftrightarrow}\ \frac{F(x_0+1)-x_0F(x_0)}{x_0-2}+\frac{\int_0^1 2F(x)dx+f(x_0)}{x_0-1}=0$